

Durée : 4 heures

⌘ Baccalauréat S Nouvelle-Calédonie ⌘  
Série obligatoire mars 2012

EXERCICE 1

5 points

Commun à tous les candidats

Partie A :

1.  $P(i\sqrt{2}) = (i\sqrt{2})^3 - (2+i\sqrt{2})(i\sqrt{2})^2 + 2(1+i\sqrt{2})(i\sqrt{2}) - 2i\sqrt{2} =$   
 $-2i\sqrt{2} + 4 + 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} = 0 \iff i\sqrt{2}$  est solution dans  $\mathbb{C}$  de l'équation  $P(z) = 0$ .

2. a. Développons :  $(z - i\sqrt{2})(z^2 + az + b) = z^3 + az^2 + bz - z^2i\sqrt{2} - azi\sqrt{2} - bi\sqrt{2} = z^3 + (a - i\sqrt{2})z^2 + (b - ai\sqrt{2})z - bi\sqrt{2}$ .

Par identification avec l'énoncé, on obtient :

$$\begin{cases} a - i\sqrt{2} = -2 - i\sqrt{2} \\ b - ai\sqrt{2} = 2 + 2i\sqrt{2} \\ -bi\sqrt{2} = -2i\sqrt{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b + 2i\sqrt{2} = 2 + 2i\sqrt{2} \\ -b = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 \\ b = 2 \\ b = 2 \end{cases}$$

On a donc  $P(z) = (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2)$

b. En utilisant la factorisation précédente :

$$P(z) = 0 \iff (z - i\sqrt{2})(z^2 - 2z + 2) = 0 \iff \begin{cases} z - i\sqrt{2} = 0 \\ z^2 - 2z + 2 = 0 \end{cases}$$

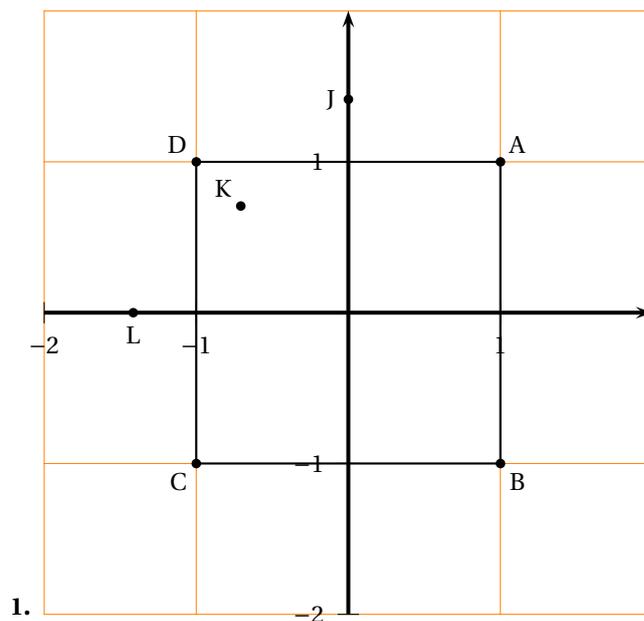
On retrouve la racine  $i\sqrt{2}$  ; résolution de l'équation du second degré :

$$z^2 - 2z + 2 = 0 \iff (z - 1)^2 - 1 + 2 = 0 \iff (z - 1)^2 + 1 = 0 \iff$$

$$(z - 1)^2 = -1 \iff (z - 1)^2 = i^2 \iff \begin{cases} z - 1 = i \\ z - 1 = -i \end{cases} \iff \begin{cases} z = 1 + i \\ z = 1 - i \end{cases}$$

Les solutions sont donc :  $i\sqrt{2}$ ,  $1 + i$ ,  $1 - i$ .

Partie B :



2. On a  $z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

K est le milieu du segment [JL] ce qui se traduit en coordonnées par :

$$\begin{cases} x_K = \frac{1}{2}(x_J + x_L) \\ y_K = \frac{1}{2}(y_J + y_L) \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(0 + x_L) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + y_L) \end{cases} \iff \begin{cases} x_L = -\sqrt{2} \\ y_L = 0 \end{cases}$$

Conclusion :  $z_L = -\sqrt{2}$ .

3. On a  $|z_A|^2 = 1^2 + 1^2 = 2$

$$|z_B|^2 = 1^2 + (-1)^2 = 2$$

$$|z_J|^2 = (\sqrt{2})^2 = 2$$

$$|z_L|^2 = (-\sqrt{2})^2 = 2.$$

On a donc  $OA = OB = OJ = OL = \sqrt{2}$  : les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle de centre O et le rayon  $\sqrt{2}$ .

4. a. Un argument de  $z_J$  est  $\frac{\pi}{2}$  et un argument de  $z_D$  est  $\frac{3\pi}{4}$ , donc l'angle de la rotation est  $\frac{\pi}{4}$ .

b. Par définition de la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ , on a :

$$z_C - z_O = e^{i\frac{\pi}{4}}(z_L - z_O) \iff z_C = e^{i\frac{\pi}{4}}z_L = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(-\sqrt{2}) = -1 - i.$$

5. On a successivement :

O est milieu de [BD] et [AC], donc ABCD est un parallélogramme ;

AC = BD = 2, donc ABCD est un rectangle ;

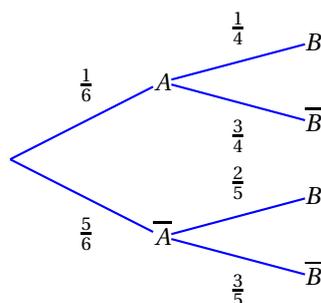
(AC) et (BD) sont perpendiculaires, donc ABCD est un losange, donc finalement : ABCD est un carré.

## EXERCICE 2

4 points

Commun à tous les candidats

1. a.



b. D'après la loi des probabilités totales :  $p(B) = p(A) \times p_A(B) + p(\bar{A}) \times$

$$p_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{4} + \frac{5}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{24} + \frac{1}{3} = \frac{1}{24} + \frac{8}{24} = \frac{9}{24} = \frac{3}{8} = 0,375.$$

c.  $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{8}} = \frac{1}{24} \times \frac{8}{3} = \frac{1}{9}.$

2. a. Les parties étant indépendantes la variable X suit une loi binomiale de paramètres  $n = 10$  et  $p = \frac{3}{8}$ .

La probabilité de gagner exactement trois parties est égale à :

$$p(X = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(1 - \frac{3}{8}\right)^{10-3} = \binom{10}{3} \left(\frac{3}{8}\right)^3 \times \left(\frac{5}{8}\right)^7 \approx 0,2357 \approx 0,236 \text{ au millième près.}$$

- b. On a  $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \left(\frac{3}{8}\right)^0 \times \left(\frac{5}{8}\right)^{10} = 1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{10} \approx 0,9909 \approx 0,991$  au millième près.
- c. À partir du tableau donné on calcule les probabilités  $P(X = k - 1)$  par différence entre deux valeurs consécutives. On constate que  $P(X = 7)$  est la première valeur inférieure à 0,1. Donc  $N = 7$ .

$k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X < k)$	0,0091	0,0637	0,2110	0,4467	0,6943	0,8723	0,9616	0,9922	0,9990	0,9999
$P(X = k - 1)$	0,0091	0,0546	0,1473	0,2357	0,2476	0,1782	0,0891	0,0306	0,0068	0,0009

**EXERCICE 3****5 points****Candidats n'ayant pas choisi l'enseignement de spécialité****VRAI ou FAUX ?**

Pour chacun des énoncés suivants, indiquer si la proposition correspondante est vraie ou fautive et proposer une justification de la réponse choisie.

**1. Énoncé 1 :**

OUI : exemple  $a_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2^n}$ .

**2. Énoncé 2 :**

FAUX : on a  $z_1 = e^{\frac{2i\pi}{3}}$  qui a pour argument  $\frac{2i\pi}{3}$  et  $z_{20} = e^{\frac{2i \times 20\pi}{3}} = e^{\frac{40i\pi}{3}}$ . Or

$\frac{40\pi}{3} = \frac{36\pi + 4\pi}{3} = 12\pi + \frac{4\pi}{3}$ , donc  $z_{20}$  a pour argument  $\frac{4\pi}{3} \neq \frac{2\pi}{3}$ . Donc les points O,  $M_1$  et  $M_{20}$  ne sont pas alignés.

**3. Énoncé 3 :**

Proposition 3 :

FAUX : si la courbe 3 est la représentation graphique de  $f$ , la courbe 1 est celle de  $F$  puisque c'est la seule qui contient l'origine ( $F(0) = 0$ ).

Or on voit sur la courbe 1 que  $F'(\frac{\pi}{4}) = 0$ , mais  $f(\frac{\pi}{4}) \neq 0$ . Donc la courbe 1 n'est pas la représentation graphique de la primitive  $F$ .

**4. Énoncé 4 :**

Proposition 4 : Calculons la distance de A au plan P :

$$d(A; P) = \frac{|3|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2} \approx 1,225.$$

La distance est inférieure au rayon du cercle : la réponse est VRAI.

**5. Énoncé 5 :**

Proposition 5 :

On sait que la fonction définie par  $x \mapsto 2$  est une solution particulière de (E).

D'autre part les solutions de l'équation (E') :  $y' + 2y = 0$  sont les fonctions de la forme  $Ke^{-2x}$ .

Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par  $y = 2 + Ke^{-2x}$ .

Or  $y(0) = 0 \iff 2 + Ke^0 = 0 \iff 2 + K = 0 \iff K = -2$ .

La fonction solution est donc définie par :  $y = 2 - 2e^{-2x}$ .

On voit avec les limites en  $+\infty$  et  $-\infty$  que la représentation graphique est la courbe  $C_3$ . Donc FAUX

**EXERCICE 4****6 points****Commun à tous les candidats****PARTIE A :**

1. Posons :

$$\begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = 1 \end{cases}$$

Toutes les fonctions étant continues car dérivables sur  $[0; 1]$ , on peut procéder à une intégration par parties :

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = [xe^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - 0 - (e - 1) = 1.$$

2. a.  $\mathcal{A}(OAA') = \frac{1}{2} a \times ae^a = \frac{1}{2} a^2 e^a.$

$$\mathcal{A}(ABB'A') = \frac{1}{2} (ae^a + e) \times (1 - a) = \frac{1}{2} (ae^a - a^2 e^a + e - ae).$$

b. Les segments  $[OA]$  et  $[AB]$  étant au dessus de la courbe  $\mathcal{C}$  l'aire de la partie hachurée est égale à la somme des aires du triangle et du trapèze précédents diminuée de l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe  $\mathcal{C}$  et les droites d'équation  $x = 0$  et  $x = 1$ , soit :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} a^2 e^a + \frac{1}{2} (ae^a - a^2 e^a + e - ae) - \int_0^1 xe^x dx = \\ & \frac{1}{2} (a^2 e^a + ae^a - a^2 e^a + e - ae) - 1 = \frac{1}{2} (ae^a - ae + e - 2). \end{aligned}$$

### PARTIE B :

1. Toutes les fonctions sont dérivables sur  $[0; +\infty[$ , donc :

$$g'(x) = e^x - e + xe^x.$$

$$\text{Puis } g''(x) = e^x + e^x + xe^x = e^x(2 + x).$$

2. On sait que  $e^x > 0$  quel que soit le réel  $x$ , et sur  $[0; +\infty[$ ,  $2 + x \geq 2 > 0$  : donc sur  $[0; +\infty[$ ,  $g''(x) > 0$  : on conclut que la fonction  $g'$  est croissante (strictement) sur  $[0; +\infty[$ .

3. On a  $g'(0) = 1 - e < 0$  et  $g'(1) = e > 0$ .

Donc la fonction  $g'$  monotone croissante et croissante sur  $[0; 1]$  de  $g'(0) < 0$  à  $g'(1) > 0$  s'annule une seule fois sur cet intervalle.

Il existe donc un réel  $\alpha \in [0; 1]$  tel que  $g'(\alpha) = 0$ .

La calculatrice donne :  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

4. Sur l'intervalle  $[0; \alpha]$ ,  $g'(x) < 0$  : la fonction est donc décroissante sur cet intervalle.

Sur l'intervalle  $[\alpha; +\infty[$ ,  $g'(x) > 0$  : la fonction est donc croissante sur cet intervalle.

5. D'après tous les résultats précédents, l'aire de la surface hachurée est égale à :

$\frac{1}{2} g(\alpha)$ . Or on a vu que la fonction  $g$  a sur sur  $[0; +\infty[$  et également sur  $[0; 1]$  un minimum en  $x = \alpha$ .

L'aire minimum est donc égale à :  $\frac{1}{2} g(\alpha)$

*Non demandé* : cette aire vaut approximativement 0,0882 unité d'aire.